

Stefan BUĆKO, Marcin WIKŁACZ, Zakład Mechaniki Doświadczalnej i Biomechaniki, Politechnika Krakowska, Kraków

ANALITYCZNO-EKSPERYMENTALNA METODA WYZNACZANIA SZTYWNOŚCI OSIOWEJ APARATU ILIZAROWA

Streszczenie. Praca prezentuje nietypowe ujęcie problemu wyznaczenia sztywności aparatu Ilizarowa zawierającego druty Kirschnera oraz wkręty Schanza. Opracowana metoda obliczeń nie wymaga zastosowania metody elementów skończonych, a jedynie wykonania prostych eksperymentów i obliczeń. Niezbędne w analizie parametry opisujące podatność pierścieni Ilizarowa wyznaczano eksperymentalnie. Istotnym rozwinięciem, w stosunku do wcześniejszych prac jest opracowanie analitycznej metody opisu współpracy pierścieni Ilizarowa z wkrętami Schanza uwzględniającej podatność wszystkich elementów aparatu.

1. WSTĘP

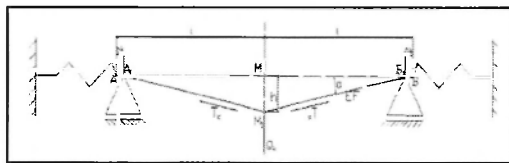
Wyznaczanie sztywności aparatu Ilizarowa zawierającego druty Kirschnera oraz grotowkręty Schanza jest ważnym zagadnieniem przy stosowaniu tej metody leczenia. Współcześnie dość często rozwiązuje się ten problem przy zastosowaniu metody elementów skończonych. Należy jednak pamiętać, że możliwe jest również opracowanie analityczno-eksperymentalnego podejścia do wyznaczenia sztywności aparatu Ilizarowa, co zostało zaprezentowane dla układu z drutami Kirschnera w pracy [1]. Niezbędne w analizie, a trudne do wyznaczenia teoretycznego wielkości charakteryzujące podatność pierścieni Ilizarowa, liczby wpływowe umożliwiające wyznaczenie przemieszczeń liniowych i kątowych przekrojów pierścieni, można wyznaczać eksperymentalnie. Istotnym rozwinięciem, w stosunku do wspomnianej wyżej pracy [1], jest opracowanie analizy współpracy pierścienia Ilizarowa z grotowkrętami Schanza uwzględniającej podatność obu elementów. Opracowano ogólne zasady formułowania równań opisujących rozkład sił i przemieszczeń w układzie zawierającym druty Kirschnera w różnych położeniach oraz grotowkręty Schanza. Przedstawiona w pracy metodyka postępowania przy wyznaczaniu liczb wpływowych dla pierścienia oraz formułowania warunków zgodności odkształceń zespołu elementów są ogólne i mogą być stosowane dla szerokiej gamy układów aparatu Ilizarowa.

2. ANALIZA WSPÓŁPRACY PIERŚCIENIA Z DRUTAMI KIRSCHNERA I GROTOWKRĘTAMI SCHANZA

2.1. Współpraca pierścienia z drutami Kirschnera leżącymi w płaszczyźnie pierścienia

Poniżej przytoczono skrócony fragment koncepcji współdziałania drutów Kirschnera z pierścieniem Ilizarowa według pracy [1]. Ułatwi to czytanie dalszych analiz w niniejszej pracy. Podstawowe założenia tych analiz: odkształcenia pierścieni i drutów Kirschnera są

liniowo – sprężyste, pomija się wpływ odkształceń giętych drutów Kirschnera, pomija się osiowe przemieszczenia punktów zamocowania drutów Kirschnera (pierścienie podparte są teleskopami), przemieszczenia wywołane napięciem wstępnym, oraz ich przyrosty wywołane obciążeniem osiowym kości mają taki sam kierunek, oddziaływanie pierścienia w modelu obliczeniowym zastąpiono sprężynami o odpowiedniej sztywności, odrzucono również zasadę zeszywnienia.



Rys. 1. Schemat odkształceń drutu Kirschnera

Przyrost siły osiowej w drucie Kirschnera od siły pionowej Q_k wynosi wg rys. 1:

$$T_k = \Delta \varepsilon_k \cdot EF = \left(\frac{h^2}{2l^2} - \frac{\Delta_k}{l} \right) EF = \frac{1}{2} EF \frac{h^2}{l^2} - \frac{\Delta_k}{l} EF \quad (1)$$

$$\Delta_k = \delta_k T_k \quad (2)$$

Z warunków równowagi siła przenoszona przez jeden drut:

$$Q_k \equiv 2T_{0k} \frac{h}{l} + 2 \frac{EF}{2(1+K_k)} \frac{h^3}{l^3} \quad (3)$$

$$K_k = \delta_k \frac{EF}{l} \quad (4)$$

gdzie T_{0k} – napięcie wstępne drutu, EF – sztywność rozciągania drutu Kirschnera, δ_k – liczby wpływowe pierścienia.

Dla układu złożonego z pierścienia oraz „n” drutów Kirschnera umieszczonych w punktach 1,2,3,...,n pierścienia konieczne jest wprowadzenie liczb wpływowych w ogólniejszej formie:

$$\delta_{ij} = \frac{u_i}{P_j} \quad (5)$$

gdzie: u_i – przemieszczenie punktu „i” od siły P_j .

Dla i- tego drutu można zapisać równanie:

$$\delta_{i,1} T_1 + \delta_{i,2} T_2 + \dots + \left(\frac{l}{EF} + \delta_{i,n} \right) T_n = \frac{1}{2} l \left(\frac{h}{l} \right)^2, \text{ gdzie } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (6)$$

W rezultacie otrzymuje się układ równań liniowych z uwagi na T_j . Po jego rozwiązaniu:

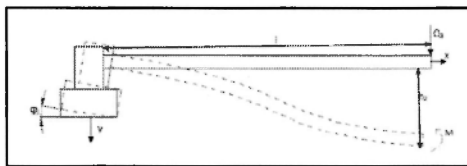
$$Q = \sum_{k=1}^n Q_k = \frac{2h}{l} \sum_{k=1}^n 2(T_{0k} + T_k) \quad (7)$$

Ponieważ punkty środkowe drutów Kirschnera przemieszczają się tak samo jak kość, przemieszczenia ich są równe. Zatem wzór ten określa zależność pomiędzy siłą pionową Q a przemieszczeniem pionowym środka drutu h .

2.2. Współpraca grotowkrętów Schanza z pierścieniem Ilizarowa

Jak pokazano wyżej druty Kirschnera realizują przenoszenie siły osiowej, przy czym istotną rolę odgrywają siły napięcia wstępnego w drutach. Grotowkręty Schanza wspierają się na pierścieniu tylko w jednym „punkcie” i przenoszą siłę osiową w aparacie wskutek zginania. Zapewnieniu odpowiedniego udziału grotowkręta w przenoszeniu siły osiowej służy

jego znacząco większy przekrój poprzeczny. Przyłożenie obciążenia kości do grotowkręta Schanza wymusza jego zginanie oraz skręcanie pierścienia. Wobec wkręcenia pręta Schanza w kość, koniec tego pręta przemieszcza się razem z kością przy czym można założyć, że kąt między prętem a kością nie ulegnie zmianie w procesie odkształcenia układu. Odpowiada to założeniu, że kąt obrotu końca grotowkręta związanego z kością równy jest zero. Oznacza to równocześnie konieczność przyłożenia na końcu grotowkręta momentu M o wartości zapewniającej zerowanie kąta obrotu końcowego przekroju (rys. 2).



Rys. 2. Przyjęty schemat odkształceń grotowkręta Schanza

Przemieszczenie końca grotowkręta wywołane działaniem siły Q_3 (rys. 2) można wyznaczyć wykorzystując równanie różniczkowe odkształconej osi belki (grotowkręta) z odpowiednimi warunkami brzegowymi:

$$EJw'' = Q_3(l - x) - M; \text{ przy warunkach: } w(0) = 0, w'(0) = \varphi_1, w'(l) = 0 \quad (8)$$

Istotnym parametrem w rozpatrywanym zagadnieniu jest kąt obrotu związany z pierścieniem końca grotowkręta Schanza - φ_1 związany z obciążeniami oraz sztywnością pierścienia z uwagi na skręcanie. Wielkości niezbędne do wyznaczenia kąta φ_1 można wyznaczyć na podstawie danych z eksperymentu pozwalających na wyznaczenie liczby wpływowej związanej ze sztywnością skrętną pierścienia, a mianowicie $\delta_{i,j}^s$ zdefiniowanej dla jednego grotowkręta umieszczonego w punkcie i jako:

$$\delta_{i,j}^s = \frac{\varphi_1}{M_u} = \frac{\varphi_1}{\frac{1}{2}Q_3l - \frac{EJ}{l}\varphi_1} \quad (9)$$

Sposób doświadczalnego wyznaczania liczb wpływowych $\delta_{i,j}^s$ zostanie opisany w dalszych rozdziałach. Po wykonaniu całkowania równania linii ugięcia oraz wykorzystaniu warunków brzegowych można uzyskać związek między siłą pionową, a przemieszczeniem końca grotowkręta:

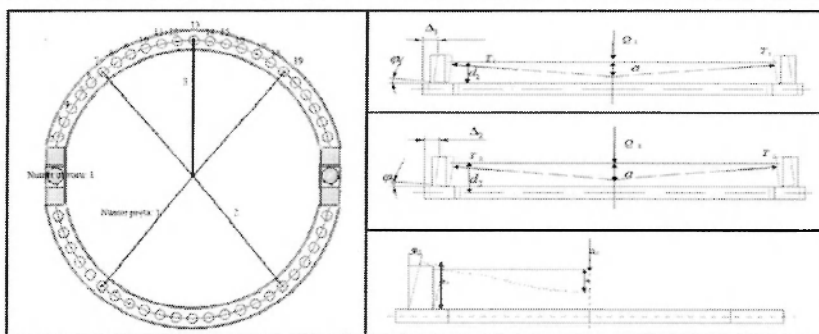
$$f_2 = \frac{Q_3l^3\delta_{i,j}^s}{4(l + EJ\delta_{i,j}^s)} + \frac{Q_3l^3}{12EJ} \quad (10)$$

Należy tutaj zaznaczyć, że w przypadku występowania innych elementów jak np. druty Kirschnera będzie to rzutować istotnie na wartości kąta obrotu oznaczonego jako φ_1 .

3. PRZYPADEK DOWOLNEGO POŁOŻENIA DRUTÓW I PRĘTÓW W PŁASZCZYZNACH RÓWNOLEGLYCH

Całkowita siła (Q) działająca prostopadle do płaszczyzny pierścienia jest sumą sił przenoszonych przez druty Kirschnera (Q_1, Q_2) i wkręt Schanza (Q_3).

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{2a}{l}(T_{01} + T_{02} + T_1 + T_2) + Q_3 \quad (11)$$



Rys. 3. Zamocowanie oraz odkształcenia dwóch drutów Kirschnera i grotowkręta Schanza

Środek drutu Kirschnera i koniec grota Schanza przemieszczają się o tą samą odległość „a” (rys. 3). Przemieszczenie to wyznaczono dla wkrętu Schanza i opisane jest zależnością:

$$a = l(\delta_{13,19}^s d_1 T_1 + \delta_{13,7}^s d_2 T_2 + \frac{l^2 \delta_{13,13}^s Q_3}{2(l + \delta_{13,13}^s EJ)}) + \frac{\delta_{13,13}^s Q_3 l^3}{4(l + \delta_{13,13}^s EJ)} + \frac{Q_3 l^3}{12EJ} \quad (12)$$

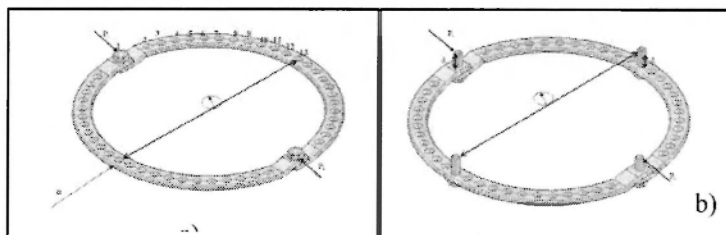
We wzorze zostały uwzględnione przemieszczenia i obroty pierścienia wywołane przez druty Kirschnera. Sposób wyznaczenia przyrostów sił osiowych przedstawiono w rozdziale 2.1. W tym przypadku przyrosty sił osiowych wynoszą:

$$T_1 = \left(\frac{a^2}{2l^2} - \frac{\Delta_1}{l} \right) EF = \frac{EF(a^2 - 2l\delta_{19,7} T_2 - 2l\delta_{19,13}^s d_1 (\frac{1}{2} Q_3 l - \frac{EJ}{l} \frac{l^2 \delta_{13,13}^s Q_3}{2(l + \delta_{13,13}^s EJ)}))}{2l^2 + 2lEF\delta_{19,19}} \quad (13)$$

$$T_2 = \frac{EF(a^2 - 2l\delta_{7,19} T_1 - 2l\delta_{7,19}^s d_2 (\frac{1}{2} Q_3 l - \frac{EJ}{l} \frac{l^2 \delta_{13,13}^s Q_3}{2(l + \delta_{13,13}^s EJ)}))}{2l^2 + 2lEF\delta_{7,7}} \quad (14)$$

Z przytoczonych wyżej równań (11), (12), (13) i (14), po ich rozwiązaniu możliwe jest wyznaczenie: $T_1, T_2, Q_1, Q_2, Q_3, a$.

4. DOŚWIADCZALNE WYZNACZENIE LICZB WPŁYWOWYCH



Rys. 4. Punkty pomiaru przemieszczeń, w celu wyznaczenia liczb wpływowych

Jak wspomniano w p. 1 niezbędne do metody analitycznej parametry charakteryzujące podatność pierścienia – liczby wpływowe – wyznaczano doświadczalnie podobnie do sposobu stosowanego w pracy [1]. Dla wyznaczenia macierzy liczb wpływowych pierścienia konieczne jest wykonanie dwóch serii pomiarów przemieszczeń przy odpowiednio dobranych warunkach obciążenia. Pierwsza seria pomiarów obejmowała wyznaczenie (pomiar)

przemieszczeń u_i^s w płaszczyźnie środkowej pierścienia wynikających ze zginania siłami działającymi wzdłuż średnicy w płaszczyźnie środkowej – co pokazano na rys.4a. W technice pomiarów można wykorzystać zależności wynikające z twierdzenia Maxwella.

W drugiej serii pomiarów obciążano pierścień siłami przyłożonymi do wsporników sztywno z nim połączonych, wzdłuż linii równoległej do średnicy i odległej od powierzchni środkowej o wielkość d_i ($d_i = 11\text{ mm}$) (rys.4b). Mierzono w tym przypadku przemieszczenia u_i w odległości d_j ($d_j = d_i = 11\text{ mm}$) będące sumami przemieszczeń u_i^g oraz przemieszczeń u_i^s wynikających z obrotu przekroju poprzecznego pierścienia wskutek działania momentu $M = P_i d_i$. Powyższe dwie serie pomiarów pozwalają na wyznaczenie niezbędnych w analizie sztywności liczb wpływowych $\delta_{i,j}^g$ oraz $\delta_{i,j}^s$. (15),(16).

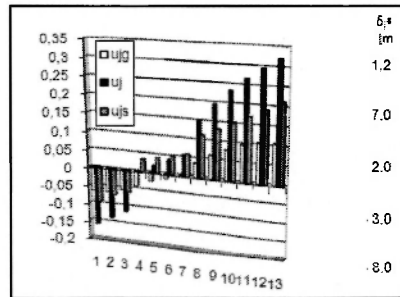
Przemieszczenie radialne punktu A_j odległego o \bar{a}_j od płaszczyzny środkowej pierścienia, wywołane siłą P_i działającą równoległe do średnicy, w odległości d_i od płaszczyzny środkowej, można określić wzorem:

$$\Delta_i = u_i^g + u_i^s = P_i \delta_{i,j}^g + (P_i d_i) \delta_{i,j}^s d_j = P_i (\delta_{i,j}^g + \delta_{i,j}^s d_i d_j) = P_i \cdot \delta_{i,j} \quad (15)$$

dzięki czemu możemy sformułować zależność:

$$\delta_{i,j} = \delta_{i,j}^g + \delta_{i,j}^s \cdot d_i \cdot d_j \quad (16)$$

Liczby wpływowe $\delta_{i,j}$ wyznaczone zostały dla przypadku, gdy siła przykładana jest równoległe do średnicy pierścienia na odległości $d_0 = 11[\text{mm}]$.

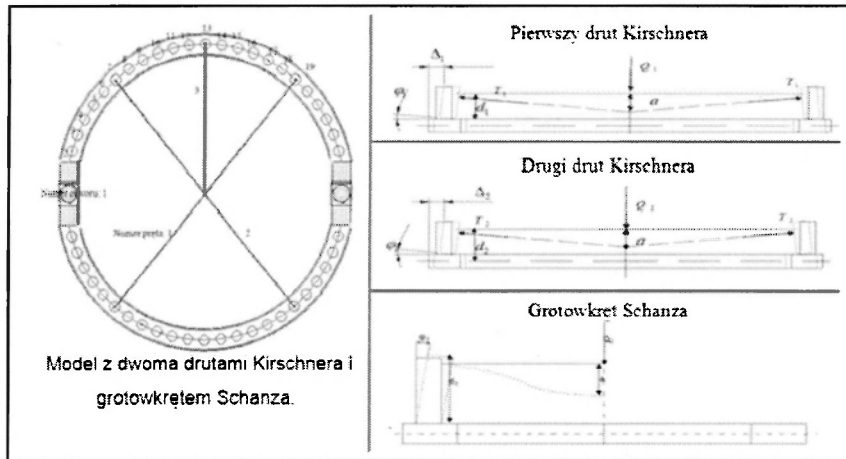


Rys. 5. Wykresy zmierzonych wartości przemieszczeń pierścienia u_j^g, u_j^s, u_j^g oraz

obliczonych na tej podstawie liczb wpływowych $\delta_{i,j}^g = \frac{u_i^g}{P}$, $\delta_{i,j}^s = \frac{u_i^s}{d_j M}$

5. PRZYKŁAD LICZBOWY

Powyższy sposób rozumowania zastosowano do obliczenia sztywności pierścienia Ilizarowa z zamocowanymi dwoma drutami Kirschnera oraz grotowkrętem Schanza, w trzech różnych odległościach od płaszczyzny pierścienia. Otrzymano następujące wyniki: przemieszczenie końca kości $a \approx 2,5[\text{mm}]$, rozkładu sił osiowych w drutach Kirschnera $T_{c1} = 997[\text{N}], T_{c2} = 984,2[\text{N}]$; Rozkład sił działających prostopadle do powierzchni pierścienia $Q_1 \approx 64,8[\text{N}], Q_2 \approx 64[\text{N}], Q_3 \approx 71,1[\text{N}]$.



Rys. 6. Sposób zamontowania dwóch drutów Kirschnera i grotowkręta Schanza w odległościach: $d_1 = 10[mm]$, $d_2 = 20[mm]$, $d_3 = 15[mm]$

Schemat odkształcenia pierścienia i grotowkręta Schanza są zbliżone do rzeczywistego (rys. 6). Analizując wyniki można stwierdzić, że wkręt Schanza może w dużym stopniu zastąpić drut Kirschnera, co ma niemałe znaczenie w zastosowaniu praktycznym.

LITERATURA

- [1] Bućko S., Mazurkiewicz S.: Teoretyczna i doświadczalna analiza podatności aparatu Ilizarowa, XIII Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego, Jachranka, 1998.
- [2] Bućko S., Mazurkiewicz S.: Metoda uzyskiwania wymaganych sił napięcia wstępnych drutów Kirschnera, 4 Seminarium Mechanika w Medycynie, Rzeszów, 1998.
- [3] Bućko S., Forma K., Herdzina M.: System szybkiej numerycznej analizy podatności wybranych układów aparatu Ilizarowa, Aktualne Problemy Biomechaniki, Gliwice, 2009.
- [4] Wikłacz M.: Analiza współpracy drutów Kirschnera i grotowkrętów Schanza w aparacie Ilizarowa, praca dyplomowa, Politechnika Krakowska, 2007.

ANALYTICAL-EXPERIMENTAL METHOD FOR EVALUATING AXIAL STIFFNESS OF THE ILIZAROW APPARATUS

Summary. This paper presents an uncommon solution to the problem of acquiring the value of stiffness of the Ilizarow apparatus that consists of Kirschner wires and Schanz screws. The proposed method does not require the application of the Finite Element Method, as the only necessary requirement is the execution of a few basic experiments and calculations. The parameters defining the sensibility of the Ilizarow rings are acquired through the experimental means. A significant improvement in comparison to the earlier works in this field is the derivation of the analytical method for describing the cooperation of Ilizarow rings and the Schanz screws, with regard to the sensibility of all the apparatus' elements.