

**Antoni JOHN, Agnieszka MUSIOLIK**, Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki, Politechnika Śląska, Gliwice

## DWUWYMIAROWY MODEL MATEMATYCZNY RĘKI

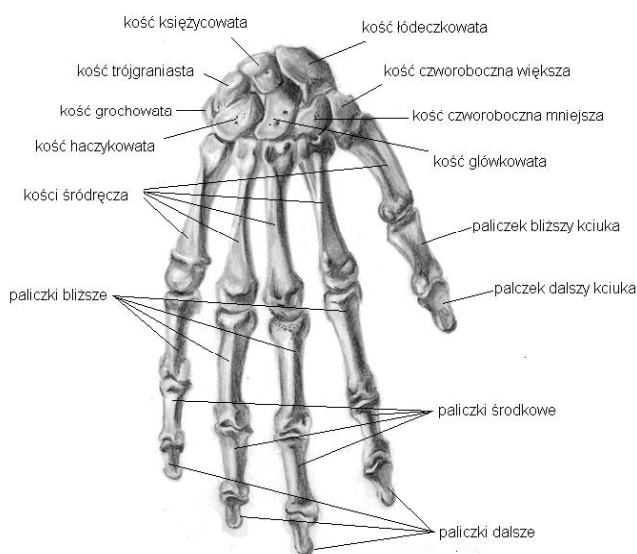
**Streszczenie.** W artykule zaproponowano dwuwymiarowy model paliczków ręki bez uwzględnienia kciuka. Model ten opisuje reakcje jakie występują w poszczególnych paliczkach ręki oraz w stawach pomiędzy nimi. Krótka informacja na temat anatomii ręki ma na celu lepsze zrozumienie istoty jej modelowania.

### 1. WSTĘP

W celu lepszego zrozumienia istoty funkcjonowania ręki w artykule krótko opisano jej anatomie oraz własności w poszczególnych paliczkach. Dane te mogą służyć do analizy kinematycznej i dynamicznej oraz do zaprojektowania urządzenia do jej rehabilitacji.

### 2. ANATOMIA RĘKI

Ręka jest parzystą, dystalną częścią kończyny górnej, składającą się z trzech odcinków: nadgarstka, śródreża i palców [2]. Palec pierwszy czyli kciuk zawiera tylko 2 paliczki (dalszy i bliższy), pozostałe palce (wskazujący, środkowy, serdeczny i mały) zawierają po 3 paliczki: dalszy, środkowy i bliższy [1].

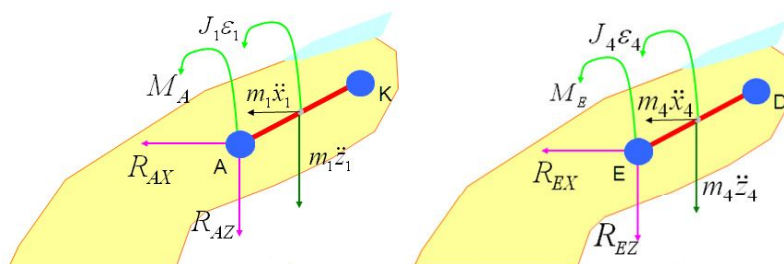


Rys. 1: Kościec ręki [1]

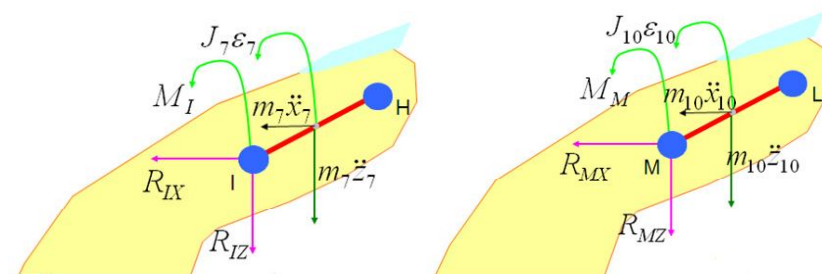
## 3. MODEL MATEMATYCZNY RĘKI

## 3.1. Dalsze paliczki ręki

W płaskim układzie współrzędnych ciało sztywne zawierające 2 punkty (które są zależne od siebie) posiada 2 współrzędne. W dwuwymiarowym modelu każdy paliczek dalszy zawiera 3 stopnie swobody, tzn. 2 przemieszczenia i obrót. Każdy staw międzypaliczkowy ręki zawiera 2 stopnie swobody, tzn. 2 przemieszczenia bez obrotu. Na rys. 1a), 1b), 2a), 2b) zaznaczono reakcje występujące w paliczkach dalszych odpowiednio dla palca wskazującego, środkowego, serdecznego i małego.



Rys. 1. Reakcje paliczka dalszego a) dla palca wskazującego, b) dla palca środkowego



Rys. 2. Reakcje paliczka dalszego a) dla palca serdecznego, b) dla palca małego

Równania równowagi reakcji oraz momentów paliczka dalszego palca wskazującego zostały przedstawione w równaniach (1-3). Pierwsze równanie równowagi zawiera rzut sił na oś X, drugie równanie równowagi zawiera rzut sił na oś Y, a trzecie równanie równowagi zawiera rzut momentów.

$$R_{AX} = -m_1 \cdot \ddot{x}_1 \quad (1)$$

$$R_{AZ} = -m_1 \cdot \ddot{z}_1 \quad (2)$$

$$M_A = -J_1 \cdot \varepsilon_1 - R_{AX} \cdot k_1 - R_{AZ} \cdot e_1 \quad (3)$$

Równania równowagi reakcji oraz momentów paliczka dalszego palca środkowego zostały przedstawione w równaniach (4-6).

$$R_{EX} = -m_4 \cdot \ddot{x}_4 \quad (4)$$

$$R_{EZ} = -m_4 \cdot \ddot{z}_4 \quad (5)$$

$$M_E = -J_4 \cdot \varepsilon_4 - R_{EX} \cdot k_4 - R_{EZ} \cdot e_4 \quad (6)$$

Równania równowagi reakcji oraz momentów paliczka dalszego palca serdecznego zostały przedstawione w równaniach (7-9).

$$R_{IX} = -m_7 \cdot \ddot{x}_7 \quad (7)$$

$$R_{IZ} = -m_7 \cdot \ddot{z}_7 \quad (8)$$

$$M_I = -J_7 \cdot \varepsilon_7 - R_{IX} \cdot k_7 - R_{IZ} \cdot e_7 \quad (9)$$

Równania równowagi reakcji oraz momentów paliczka dalszego palca małego zostały przedstawione w równaniach (10-12).

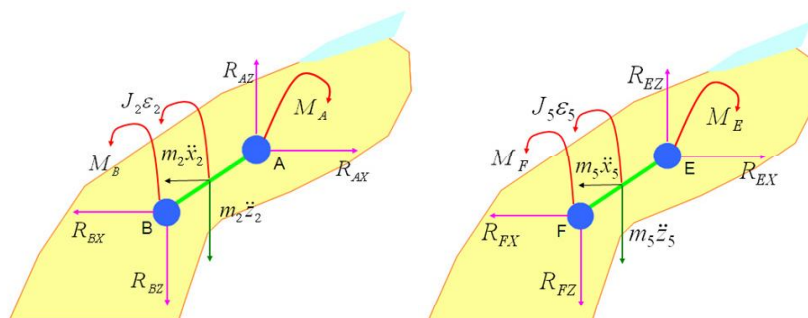
$$R_{MX} = -m_{10} \cdot \ddot{x}_{10} \quad (10)$$

$$R_{MZ} = -m_{10} \cdot \ddot{z}_{10} \quad (11)$$

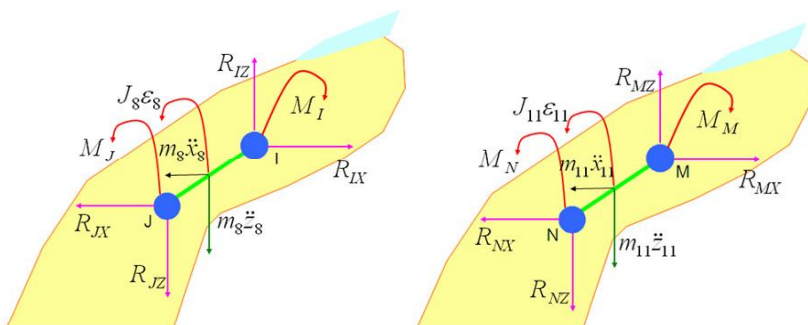
$$M_M = -J_{10} \cdot \varepsilon_{10} - R_{MX} \cdot k_{10} - R_{MZ} \cdot e_{10} \quad (12)$$

### 3.2. Środkowe paliczki ręki

Identyczna sytuacja taka jak w paliczkach dalszych występuje w przypadku środkowych paliczków ręki. Rys. 3a), 3b), 4a), 4b) przedstawiają reakcje i momenty paliczków środkowych odpowiednio dla palca wskazującego, palca środkowego, palca serdecznego i palca małego.



Rys. 3. Reakcje paliczka środkowego a) dla palca wskazującego, b) dla palca środkowego



Rys. 4. Reakcje paliczka środkowego a) dla palca serdecznego, b) dla palca małego

Równania równowagi reakcji oraz momentów paliczka środkowego palca wskazującego zostały przedstawione w równaniach (13-15).

$$R_{BX} = R_{AX} - m_2 \cdot \ddot{x}_2 \quad (13)$$

$$R_{BZ} = R_{AZ} - m_2 \cdot \ddot{z}_2 \quad (14)$$

$$M_B = M_A - J_2 \cdot \varepsilon_2 - R_{BZ} \cdot e_2 - R_{AZ} \cdot h_2 - R_{BX} \cdot k_2 + R_{AX} \cdot f_2 \quad (15)$$

Równania równowagi reakcji oraz momentów paliczka środkowego palca środkowego zostały przedstawione w równaniach (16-18).

$$R_{FX} = R_{EX} - m_5 \cdot \ddot{x}_5 \quad (16)$$

$$R_{FZ} = R_{EZ} - m_5 \cdot \ddot{z}_5 \quad (17)$$

$$M_F = M_E - J_5 \cdot \varepsilon_5 - R_{FZ} \cdot e_5 - R_{EZ} \cdot h_5 - R_{FX} \cdot k_5 + R_{EX} \cdot f_5 \quad (18)$$

Równania równowagi reakcji oraz momentów paliczka środkowego palca serdecznego zostały przedstawione w równaniach (19-21).

$$R_{JX} = R_{IX} - m_8 \cdot \ddot{x}_8 \quad (19)$$

$$R_{JZ} = R_{IZ} - m_8 \cdot \ddot{z}_8 \quad (20)$$

$$M_J = M_I - J_8 \cdot \varepsilon_8 - R_{JZ} \cdot e_8 - R_{IZ} \cdot h_8 - R_{JX} \cdot k_8 + R_{IX} \cdot f_8 \quad (21)$$

Równania równowagi reakcji oraz momentów paliczka środkowego palca małego zostały przedstawione w równaniach (22-24).

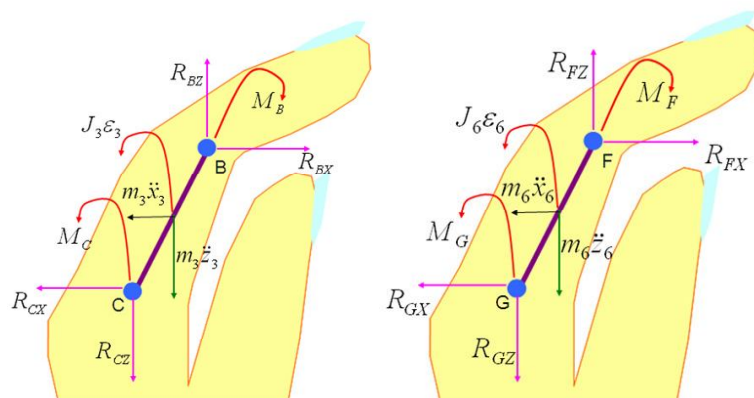
$$R_{NX} = R_{MX} - m_{11} \cdot \ddot{x}_{11} \quad (22)$$

$$R_{NZ} = R_{MZ} - m_{11} \cdot \ddot{z}_{11} \quad (23)$$

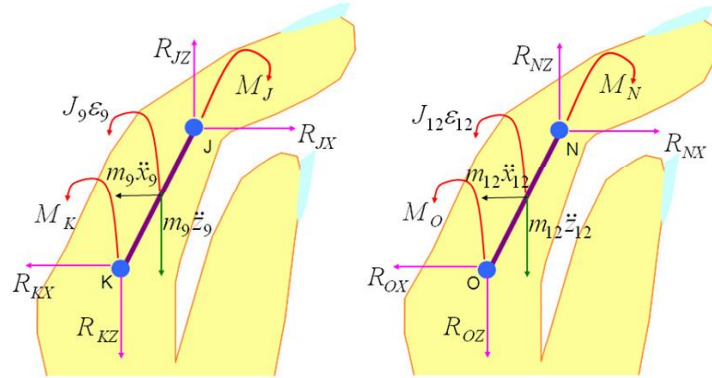
$$M_N = M_M - J_{11} \cdot \varepsilon_{11} - R_{NZ} \cdot e_{11} - R_{MZ} \cdot h_{11} - R_{NX} \cdot k_{11} + R_{MX} \cdot f_{11} \quad (24)$$

### 3.3. Bliższe paliczki ręki

Jak to zostało pokazane wcześniej, reakcje występujące w paliczkach dalszych i środkowych są takie same jak w paliczkach bliższych co można zaobserwować na rys. 5a), b) i 6a), b).



Rys. 5. Reakcje paliczka bliższego a) dla palca wskazującego, b) dla palca środkowego [3]



Rys. 6. Reakcje paliczka bliźszego a) dla palca serdecznego, b) dla palca małego

Równania równowagi reakcji oraz momentów paliczka bliźszego palca wskazującego zostały przedstawione w równaniach (25-27).

$$R_{CX} = R_{BX} - m_3 \cdot \ddot{x}_3 \quad (25)$$

$$R_{CZ} = R_{BZ} - m_3 \cdot \ddot{z}_3 \quad (26)$$

$$M_C = M_B - J_3 \cdot \varepsilon_3 - R_{CZ} \cdot e_3 - R_{BZ} \cdot h_3 - R_{CX} \cdot k_3 + R_{BX} \cdot f_3 \quad (27)$$

Równania równowagi reakcji oraz momentów paliczka bliźszego palca środkowego zostały przedstawione w równaniach (28-30).

$$R_{GX} = R_{FX} - m_6 \cdot \ddot{x}_6 \quad (28)$$

$$R_{GZ} = R_{FZ} - m_6 \cdot \ddot{z}_6 \quad (29)$$

$$M_G = M_F - J_6 \cdot \varepsilon_6 - R_{GZ} \cdot e_6 - R_{FZ} \cdot h_6 - R_{GX} \cdot k_6 + R_{FX} \cdot f_6 \quad (30)$$

Równania równowagi reakcji oraz momentów paliczka bliźszego palca serdecznego zostały przedstawione w równaniach (31-33).

$$R_{KX} = R_{JX} - m_9 \cdot \ddot{x}_9 \quad (31)$$

$$R_{KZ} = R_{JZ} - m_9 \cdot \ddot{z}_9 \quad (32)$$

$$M_K = M_J - J_9 \cdot \varepsilon_9 - R_{KZ} \cdot e_9 - R_{JZ} \cdot h_9 - R_{KX} \cdot k_9 + R_{JX} \cdot f_9 \quad (33)$$

Równania równowagi reakcji oraz momentów paliczka bliźszego palca małego zostały przedstawione w równaniach (34-36).

$$R_{OX} = R_{NX} - m_{12} \cdot \ddot{x}_{12} \quad (34)$$

$$R_{OZ} = R_{NZ} - m_{12} \cdot \ddot{z}_{12} \quad (35)$$

$$M_O = M_N - J_{12} \cdot \varepsilon_{12} - R_{OZ} \cdot e_{12} - R_{NZ} \cdot h_{12} - R_{OX} \cdot k_{12} + R_{NX} \cdot f_{12} \quad (36)$$

gdzie:

$R_{AX}, R_{AZ}, R_{BX}, R_{BZ}, R_{CX}, R_{CZ}, R_{DX}, R_{DZ}, R_{EX}, R_{EZ}, R_{FX}, R_{FZ}, R_{GX}, R_{GZ}, R_{HX}, R_{HZ}, R_{IX}, R_{IZ}, R_{JX}, R_{JZ}, R_{KX}, R_{KZ}, R_{LX}, R_{LZ}, R_{MX}, R_{MZ}, R_{NX}, R_{NZ}, R_{OX}, R_{OZ}$  – reakcje w stawach dla poszczególnych palców ręki

$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}$  – masy paliczków,

$\ddot{x}_1, \ddot{z}_1, \ddot{x}_2, \ddot{z}_2, \ddot{x}_3, \ddot{z}_3, \ddot{x}_4, \ddot{z}_4, \ddot{x}_5, \ddot{z}_5, \ddot{x}_6, \ddot{z}_6, \ddot{x}_7, \ddot{z}_7, \ddot{x}_8, \ddot{z}_8, \ddot{x}_9, \ddot{z}_9, \ddot{x}_{10}, \ddot{z}_{10}, \ddot{x}_{11}, \ddot{z}_{11}, \ddot{x}_{12}, \ddot{z}_{12}$  - przyspieszenia liniowe,

$M_A, M_B, M_C, M_D, M_E, M_F, M_G, M_H, M_I, M_J, M_K, M_L, M_M, M_N, M_O$  – momenty w stawach międzypaliczkowych palców,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7, \varepsilon_8, \varepsilon_9, \varepsilon_{10}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}$  – przyspieszenia kątowe,

$J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, J_7, J_8, J_9, J_{10}, J_{11}, J_{12}$  – momenty bezwładności,

$e_1, k_1, e_2, k_2, e_3, k_3, e_4, k_4, e_5, k_5, e_6, k_6, e_7, k_7, e_8, k_8, e_9, k_9, e_{10}, k_{10}, e_{11}, k_{11}, e_{12}, k_{12}$  – odległości.

#### 4. WNIOSKI

Model matematyczny opisany w artykule może zostać wykorzystany do skonstruowania urządzenia do rehabilitacji ręki. Model ten ukazuje, złożoność procesu modelowania ręki.

Model ten ma charakter poglądowy i może być pomocny w wyznaczeniu reakcji, momentów bezwładności w stawach oraz pozycji, prędkości i przyspieszeń podczas wykonywanego ruchu. Masy i długości paliczków są znane, a resztę zależności można wyznaczyć w programie Matlab budując odpowiedni kod.

Praca jest częścią projektu N51804732/3670 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

#### LITERATURA

- [1] Krechowiecki A., Czerwiński F., Zarys anatomii człowieka, Wydawnictwo Lekarskie PZWL, Warszawa 2006.
- [2] Wiktora Degi Ortopedia i rehabilitacja tom II, pod red. prof. dr hab. med. Witolda Ł. Marciniaka i prof. dr. hab. med. Andrzeja Szulca, Wydawnictwo Lekarskie PZWL, Warszawa 2006.
- [3] Jureczko P., Musiolik A., Zastosowanie modelowania matematycznego w projektowaniu prototypu urządzenia do rehabilitacji ręki, Gliwice 2008.

### PLANAR MODEL OF THE HUMAN HAND

Summary. In the paper the mathematical model is used to show the movement of the hand and define the reactions at the joints, moments of inertia, velocities and accelerations of each fingers. It can be helpful in define the maximum force of the distal phalange, the middle phalange and the proximal phalange. During the motion of the hand in the rehabilitation task it shows which finger have a problem with coordinate of the motion. In this paper the mathematical modeling of the hand is used to facilitate construct a prototype device for the rehabilitation of the hand.